# Monotone and convex functions on matrix algebras (Recent Topics on Operator inequalities)

AUTHOR(S):

Tomiyama, Jun

数理解析研究所講究録 1359 巻 2004 年 58-63



# Monotone and convex functions on matrix algebras

東京都立大学名誉教授　　富山　淳 (Jun Tomiyama)
Prof.Emeritus of Tokyo Metropolitan Univ.

## 1 はじめに

区間 $I$ 上で定義された $n\times n$ 行列環 $M_n$ 上の作用素単調な関数の全体を $P_n(I)$ とかくことにする。定義から $P_n(I)$ は $n$ について単調減少なクラスであるが、$I$ 上の関数が任意の $n$ について $P_n(I)$ に属せばそれは作用素単調関数のクラス $P_\infty(I)$ にほかならない事は良く知られている。

さて実解析学において $C^\infty$ 関数、解析関数の占める重要性は勿論であるが、それらの概念の元になるクラス $C^n$ の関数の重要さもまた言うまでもない。このことを念頭に、筆者は $\{P_n(I)\}$ の関数類を $P_\infty(I)$ の構造の基本要素と考えている。しかし１９３４年の Loewner によるこれらの関数類の導入以来７０年に余る長い間多くの研究があるにも拘わらず、これらの関数族の" 積み重ね" の具合の研究の現状は古典的な場合のそれとはほど遠いものがある。

例えば、作用素単調関数についてはいくつかの同値な条件が良く知られており、それらは各 $M_n$ 上ではどれも同値にはならないが、" 一つの性質が $M_{2n}$ 上で成り立てば他の一つが $M_n$ 上で成り立つ... (従って無限大のレベルでは全て同値) " といった程度のこと以外に各段階で相互にどの様な食い違いがあるのかは現在迄全く研究されていない。

本講演では、その中で単調性を主体にその' 積み重ね' 具合を Hansen-Ji-富山 [4],S.Nayak [7] を基に議論する。また Convex operator function について最近の結果 [5] にも言及するが、証明の詳細は引用の各文献に譲る。

先ず Dobsch [2] は $P_n(I)$ の関数の特性化として次の結果を示した

定理 A [3;7 章定理 6 と 8 章定理 5]。

関数 $f(\mathrm{t})$ が n-marix monotone $(n \geq 2)$ であれば、次のことが成り立つ；

(1) $f$ は $2n-3$ 回連続微分可能， (2) $f^{2n-3}(\mathrm{t})$ が convex,

(3) 行列 $M_n(t;f)$ が $I$ 上 a.e. で存在して positive semidefinite.

ここで $M_n(\mathrm{t};f)$ は

$$M_n(\mathrm{t};f) = \left(f^{i+j-1}(\mathrm{t})/\{i+j-1\}!\right)$$

となる $I$ 上の n 次行列関数である。

逆に (1),(3) を満たす関数 $f$ が (2) で更に $f^{2n-3}$ が nonnegative であればn-marix monotone となる。

この結果は Loewner 行列による判定条件よりは有用であるが、しかし Donoghue が [3;p.84] で言っているように

”これによって任意の $n$ について $P_{n+1}(I) \neq P_n(I)$ であることがわかる”

と簡単に言い切れるものではない。実際この本は勿論殆どの他の文献での例は $n$ が１と２のときの差の関数 $\{t^2, e^t, etc.\}$ のみであり、わずかに ［8］ が３と４との違いの例を示しているくらいである。そして上の行列関数の区間内の a.e. の点での（半）正値性を判定することはたとえ $3 \times 3$ の行列で $f$ が多項式でも非常に困難であることは容易に想定出来るであろう。ここで「８」で提示されている関数類は $P_n(I)$ と $P_{n+1}(I)$ の間に入るクラス（ただし $I = [0,\infty)$）であるが、著者はこれによって任意の $n$ についての gap の存在が分かると述べている。しかしはっきり示されているのは前述のように３と４の間の例のみであり、一般の $n$ についての例はまたここでも提示されてはいない。この関数類の更なる解析は興味深いことと思われる。

更に又この定理の主体である十分性の証明の基になった、$n-$ matrix monotone の局所性

” 関数 $f$ が区間 $(a,b),(c,d)$ $(a < c < b < d)$ 上で $n-$ 単調ならば、区間 $(a,d)$ 上で $n-$ 単調になる”

については Loewner [6] は’簡単なので読者にまかす（５節定理６）’と片づけ、Donoghue [3] はさすがに補間定理を用いた長い準備のあとで証明を与えているが（[3; １４章定理 5]）その最後の部分 (p.132-133) は（修正は可能であるが）非常に不完全なものである（ちなみに、Loewner は後に彼の Lecture note ではもっと明確な証明を与えていると聞くが筆者に

は確認できていない)。局所性は単調性ばかりでなく、他の例えば convex matrix function の特性化でもそれぞれに問題になる基本性質なので、上記の結果の先ず簡単な完結した証明が望まれる。

## 2 主な結果など

定理 1A(Hansen-Ji-富山 [4]) 任意の $n$ について $I$ 上 n-matrix monotone で, かつ $I$ の任意の部分区間 $J$ 上で $(n+1)$-matrix monotone でない関数が存在する。

定理を証明するには一般に自明でない二つの区間は(無限区間もいれて)相互に作用素単調関数になるような位相同型で結べるので、以下の形の結果を示せば十分である。すなわち

定理 1B 多項式

$$g_n(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1}t^{2n-1}$$

について正数 $\alpha_n$ が存在して $g_n(t)$ は区間 $[0, \alpha_n)$ では n-matrix monotone でかつその任意の部分区間上では n + 1-matrix monotone ではない。

証明の要点は次の事柄である。

$$b_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{\,k-1} dt$$

とおけば $b_k$ の形から $g_n(t)$ は

$$g_n(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_{2n-1}t^{2n-1} + b_{2n}t^{2n}$$

と書くことが出来る. そしてこの形で $M_n(0 : g_n) = (b_{i+j-1})$ を考えるとこの Hankel 行列 は正定置であることが示せる。$M_n(t : g_n)$ の固有値は $t$ について連続なので上のことから正数 $\alpha_n$ が存在して $M_n(t : g_n)$ は区間 $[0, \alpha_n)$ 上で正定置、即ち $g_n$ は n-monotone function であることが言える。さらに $M_{n+1}(t : g_n)$ の形からこの区間の任意の部分区間上で $g_n(t)$ は n + 1-monotone ではないことも分かる

$n+1$ 次と $n$ 次の行列単調性について最近 S.Nayak [7] は次の様な結果を示している。区間 $(a, b)$ 上の関数 $f(t)$ に付随してその中の点 $t_0$ をと

り関数

$$g_{t_0}(t) = \frac{1}{f'(t_0)(t-t_0)} - \frac{1}{f(t)-f(t_0)}$$

を考える。

定理 2. $f$ をクラス $C^3$ でかつ $f'(t) > 0 \quad (t \in (a,b))$ とする。このとき $f(t)$ が $n+1$-matrix monotone であるための必要十分条件は $g_{t_0}(t)$ が任意の $t_0$ について $n$-matrix monotone なことである。

この定理の必要性にあたる部分は本質的にはずっと古く Wigner-von Neumann [9] に示されているようであるが この論文からはなかなか上の結果の必要性の証明を見いだすことは難しい。実際上の形の formulation は「9」のどこにも無いし証明共に Nayak のように簡明にはなっていない. ここで定理の $C^3$ の仮定は前記の Dobsch の定理からも見られる様に、そう強いものではない。また上のような $f$ が ある点 $t_0$ で $f'(t_0)=0$ となれば ($n \geq 2$ のときは) それは常数関数にほかならないことが知られている。

この定理を繰り返し使うことにより次の系が得られる。

系。ある $n$ について $P_n(I) = P_{n+1}(I)$ であれば

$$P_n(I) = P_{n+1}(I) = \ldots = P_\infty(I)$$

である。

これは線形正値写像の $n+1$-positivity と n-positivity との関係と平行する結果がここでも成り立つことを示し所謂 matricial structure の非線形版として興味を惹くが、n-matrix monotone で operator monotone ではない例を見付けるのは同じような難しさに思える。

定理の証明の鍵となる idea は区間から任意の点列 $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ をとり $g_{t_0}$ についての Loewner 行列式を考えるとその形から、 k 次の主行列式の符号が対応する $f$ の Loewner 行列式の $k+1$-次の主行列式の符号と一致することが Silvester の定理を通して分かりそれを元にして $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ の Loewner 行列の半正定置性が示せるということにある

さて、 convex matrix function は各 $M_n$ の段階で monotone matrix function について研究されるべき題材であるが、現在の所残念ながら基本の一つとなるその" 局所性" の証明が出来ていない。従って Dobsch の結果に対応するつぎの結果も、その十分性の証明は完結されていない。

ここでは簡単のために $f(t)$ は十分高く連続微分可能であるとする。任意の convex matrix function はこのような convex matrix function でいつでも近似できるので、この仮定の下でも結果は十分一般的な意味を持つ。

"区間 $I$ 上の関数 $f(t)$ が n-matrix convex となる必要十分条件は次の行列

$$D_n(t:f) = \left(\frac{f^{i+j}(t)}{(i+j)!}\right)$$

が positive semidefinite なことである"。

Hansen-富山「5」では更に Nayak の結果に対応する次の結果を示している。先ず関数 $f$ の差積 [..] を用いて

$$h_{t_0}(t) = \frac{[t_0, t_0, t_0, t]}{[t_0, t_0, t_0][t_0, t_0, t]}$$

を考える。

定理 3. $f(t)$ をクラス $C^3$ でかつ $f''(t) > 0 \quad (t \in I)$ とする。このとき $f(t)$ が $n+1$-natrix convex であるための必要十分条件は、$h_{t_0}(t)$ が $I$ の任意の点 $t_0$ について n-matrix monotone なことである。

ここで行列単調関数のときと似て、$f$ が n-matrix convex $(n \geq 2)$ でかつある点で $f''(t_0) = 0$ となればそれは一次式にほかならないことが知られている。また差積を用いれば前述の関数 $g_{t_0}$ は

$$g_{t_0}(t) = \frac{[t_0, t_0, t]}{[t_0, t_0][t_0, t]}$$

と書けるが、これと $h_{t_0}$ の形との類似の意味はまだ良く分かってはいない。

定理の証明は前半は前述の Nayak の定理の証明を modify すればよい。しかし monotone 性と convexity の判定では関係行列の中での点 $t_0$ の果たす役割が基本的に異なるので（後者では $[t_i, t_i, t_i]$ の形の項は $[t_0, t_0, t_0]$ のみである)、その点を克服する必要がある。

# 参考文献

[1] J.Bendat and S.Sherman,Monotone and convex operator functions,Trans. Amer. Math. Soc.,79(1955),58-71

[2] O.Dobsch, Mtrixfunktionen beschränkter Schwankung, Math. Z. 43(1937),253-388

[3] W.F.Donoghue, Monotone matrix functions and analytic continuation, Springer 1974

[4] F.Hansen,G.Ji and J.Tomiyama, Gaps between classes of matrix monotone functions, to appear in Bull. London Math. Soc.

[5] F.Hansen and J.Tomiyama, Characterization of convex matrix functions, in preparation

[6] K.Loewner, Über monotone Matrixfunktionen, Math. Z. 38 (1934), 177-216

[7] S.Nayak, Monotone matrix functions of successive order, article electonically published on July 17,2003 , Proc. Amer.Math. Soc.

[8] G.Sparr, A new proof of Löwner's theorem on monotone matrix functions, Math.Scand. 47(1980),266-274

[9] E.Wigner and J.von Neumann, Significance of Löwner's theorem in the quantum theory of collisions, Ann. of Math. 59(1954),418-433